Chapitre 6

Suites numériques

I/ Généralités

a) Définition

Définition

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de n par une suite u se note u_n et est appelé terme de rang n de la suite. Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :

1/ u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+2}$. $\quad u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, ...

2/ v définie pour tout $n \geqslant 3$ par $v_n = \dfrac{1}{n-2}$ $\quad v_3 = 1$, $v_4 = \dfrac{1}{2}$, $v_5 = \dfrac{1}{3}$, ...

b) Comment générer une suite

Selon le contexte les termes d'une suite peuvent être définis de différentes façons.

Explicitement en fonction du rang

– Toute fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$) permet de définir une suite.

Exemple : Calculer les premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 5n - 1$.
$u_0 = 2\times 0^2 - 5\times 0 - 1 = -1$; $u_1 = 2\times 1^2 - 5\times 1 - 1 = -4$;
$u_2 = 2\times 2^2 - 5\times 2 - 1 = -3$; $u_3 = 2\times 3^2 - 5\times 3 - 1 = 2$;
$u_4 = 2\times 4^2 - 5\times 4 - 1 = 11$

– Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et v_n est le nombre de diviseurs de n.
$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$; ...

$v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 2$; $v_4 = 3$; $v_5 = 2$; $v_6 = 4$ ...

Par récurrence

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

Exemple : Calculer les premiers termes des suites ci-dessous définies sur $\mathbb{N}$.

u *est définie par* $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n - 1 \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2\,;\ u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$$
$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0\,;\ u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$$

v *est définie par* $\begin{cases} v_0 = 1\,;\ v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2\,;\ v_3 = v_2 + v_1 = 2 + 1 = 3\,;$
$v_4 = v_3 + v_2 = 3 + 2 = 5\,;\ v_5 = v_4 + v_3 = 5 + 3 = 8\,;$
$v_6 = v_5 + v_4 = 8 + 5 = 13$

w *est définie par* $\quad w_0 = 3 \quad$ *et* $\begin{cases} w_{n+1} = \dfrac{w_n}{2} & \textit{si } w_n \textit{ est pair} \\ w_{n+1} = 3w_n + 1 & \textit{si } w_n \textit{ est impair} \end{cases}$

$$w_1 = 3 \times w_0 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10\,;\ w_2 = \frac{w_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\,;\ w_3 = 3 \times w_2 + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16\,;$$
$$w_4 = \frac{w_3}{2} = \frac{16}{2} = 8\,;\ w_5 = \frac{w_4}{2} = \frac{8}{2} = 4\,;\ w_6 = \frac{w_5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

II/ Sens de variation

a) Définition

Une suite étant une fonction, les définitions restent les mêmes :

u est croissante (strict. croissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \leqslant u_p$ $(n < p \Longrightarrow u_n < u_p)$
u est décroissante (strict. décroissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \geqslant u_p$ $(n < p \Longrightarrow u_n > u_p)$

Cependant, les propriétés des nombres entiers permettent d'établir les résultats suivants :

Propriété

u est croissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$
u est décroissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$

Remarques :
- Ne pas mélanger u_{n+1} et $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :
- u *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 3n + (-1)^n$.

  Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$:
  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - 2 \times (-1)^n > 0$
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- v *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$:
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 + v_n - v_n = -v_n^2 < 0$
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

– *w est définie sur $\mathbb{N}^*$ par* $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Les termes de la suite sont strictement positifs, on étudie donc le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{n+1}$

Pour tout $n \geqslant 1$, $2n \geqslant n+1$ donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

b) Propriété

Propriété *Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$, et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$, alors*
- *si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,*
- *si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.*

Démonstration : Si par exemple f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors pour tout entier n, $f(n+1) > f(n)$, c'est-à-dire exactement que $u_{n+1} > u_n$, donc (u_n) est croissante.

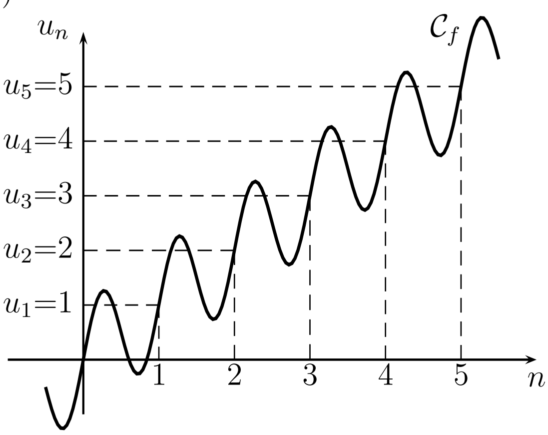
Exercice : Etudier le sens de variation des suites d´efinies par les expressions :

- $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ • $v_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ • $w_n = (n-5)^2$

Remarque : La réciproque est fausse !

Par exemple, soit la suite (u_n) définie p ar $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.

Alors, pour tout entier n, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



Exercice :Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

- $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ • $v_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ • $w_n = n^2 - 10n + 26$ • $x_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

IV/ Suites arithmétiques

Définition *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \cdots$$

Exemples :
La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 4$ et $v_n = n^2 + 2$ sont-elles arithmétiques ?

- Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n-4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$.
  La suite u est donc arithmétique de raison 3.
- $v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$ ainsi $v_1 = v_0 + 1$ et $v_2 = v_1 + 3$
  La suite v n'est donc pas arithmétique.

Exercice • La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$. On a : $u_1 = u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, $u_3 = \; \ldots$.
(u_n) est la suite des entiers naturels.

• Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \ldots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \; \ldots$

• La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

Propriété
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
Si $r = 0$ alors u est constante.
Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Démonstration immédiate (Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$...)

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :

$u_n - u_{n-1} = r\,;\quad u_{n-1} - u_{n-2} = r\,;\quad \dots\quad u_{p+2} - u_{p+1} = r\,;\quad u_{p+1} - u_p = r$

En additionnant toutes ces égalités, on obtient :

$$u_n - u_p = (n-p)r$$

soit

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

Démonstration

Posons $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

On a ainsi $2S = (u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})+\cdots+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)$

Or, pour tout $k \leqslant n$, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.

On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

Donc $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Exemple : Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 1$

$$u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} = n \times \frac{2 + 2n - 2}{2} = n^2$$

V/ Suites géométriques

a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et q un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Exemple :
La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$ et $v_n = n^2 + 1$ sont-elles géométriques ?

Pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-4 \times 3^{n+1}}{-4 \times 3^n} = 3$.
La suite u est donc géométrique de raison 3.
$v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ ainsi $v_1 = 2 \times v_0$ et $v_2 = 2,5 \times v_1$
La suite v n'est donc pas géométrique.

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :
$\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = q\,;\quad \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q\,;\quad \dots \quad \dfrac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = q\,;\quad \dfrac{u_{p+1}}{u_p} = q$
En multipliant toutes ces égalités, on obtient :
$\dfrac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ soit $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0,\ u \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } u_0 < 0,\ u \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors u est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0,\ u \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } u_0 < 0,\ u \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors u n'est pas monotone.

Démonstration

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q-1)$
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ s'obtient donc en fonction du signe de u_0, du signe de q^n et du signe de $q - 1$.

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit q un réel différent de 1.
Pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

Posons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$. On a alors $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$

D'où : $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple : Déterminer la somme des n premières puissances de 2 ($1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$)).

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de raison 2 et telle que $u_0 = 1$

Ainsi, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$